講義14 最適制御

講義14のポイント

- 評価関数を最小にする制御則である最適制御について理解しよう
- 評価関数は状態ベクトルと入力の2次形式で与えられることを理解しよう
- 評価関数の重みについて理解しよう

講義14の内容

1.時間応答と入力の大きさ
2.評価関数による制御性能と入力の評価
3.評価関数を最小にする最適制御則
4.折り返し法による最適レギュレータの設計

14.1 時間応答と入力の大きさ

- 例14.1 極配置法における，指定した閉ループ極の位置と入力の大きさの違い
  - 外乱を考慮しないマスーばねーダンパシステム
    - 例13.1と同じ
    - システムの初期ベクトル

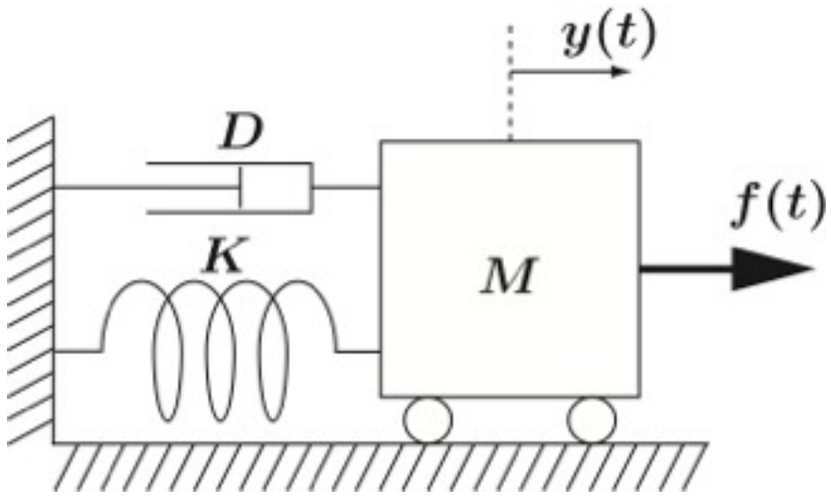
$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ → 物体の　　が-1，　　が0

    - 制御目的

      状態ベクトルを初期ベクトルから零ベクトルにさせる

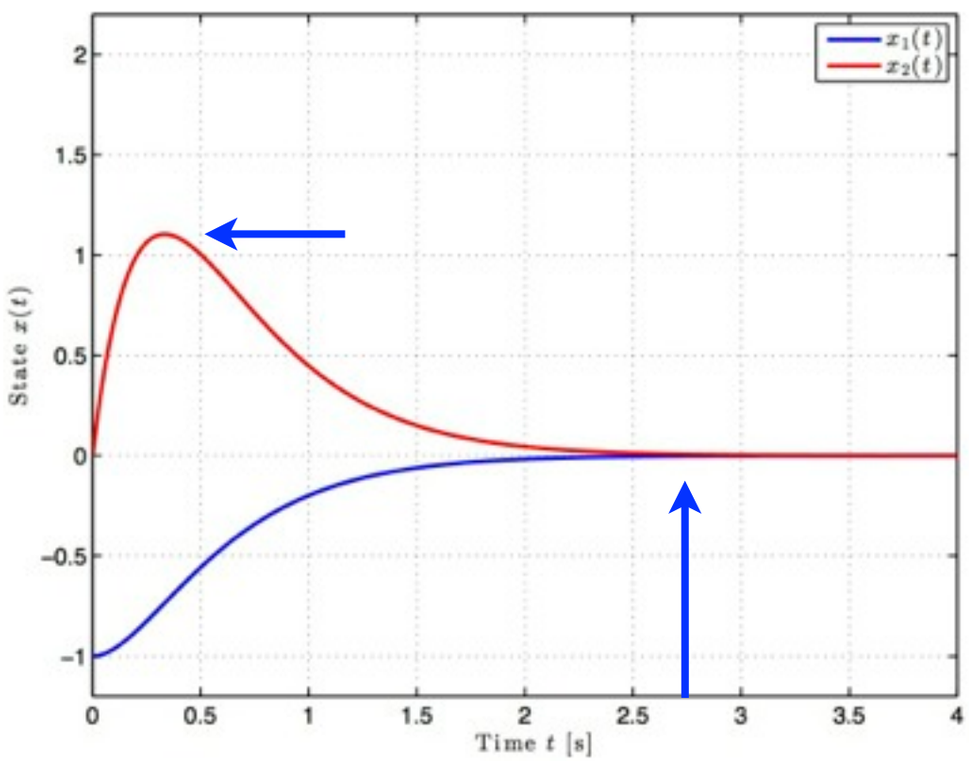
    - 状態フィードバック制御則

$$u(t) =$$

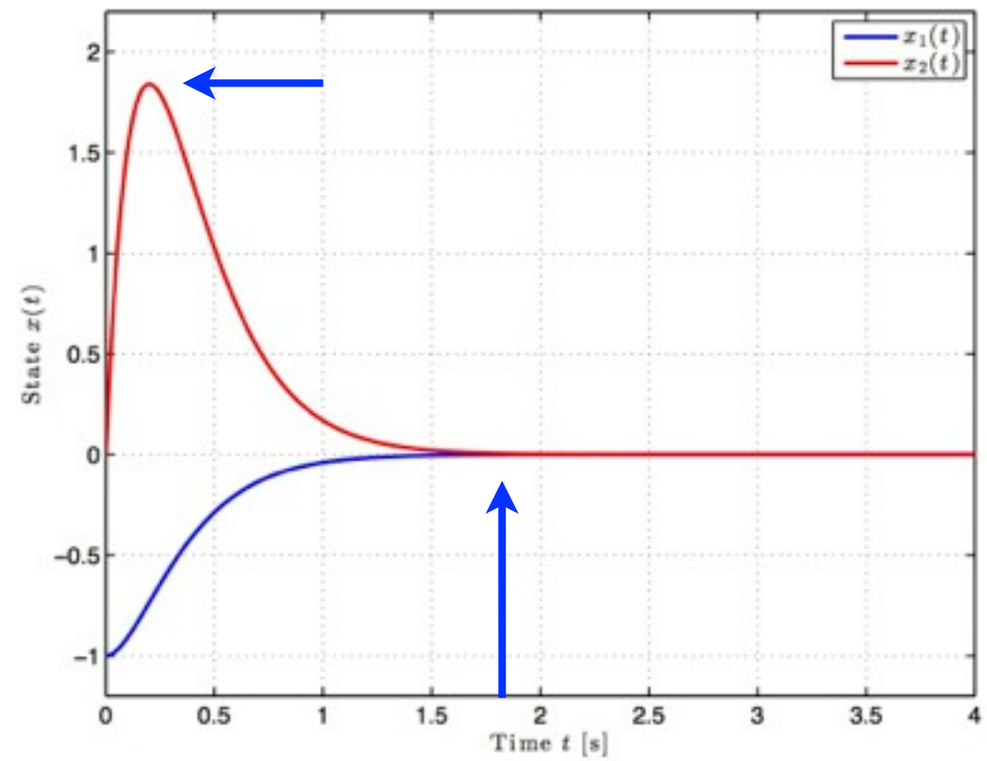


14.1 時間応答と入力の大きさ

- 例14.1
  - 閉ループシステムの極：
  - -3 の2重根 → Case → $f = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} =$



  - -5 の2重根 → Case → $f = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} =$

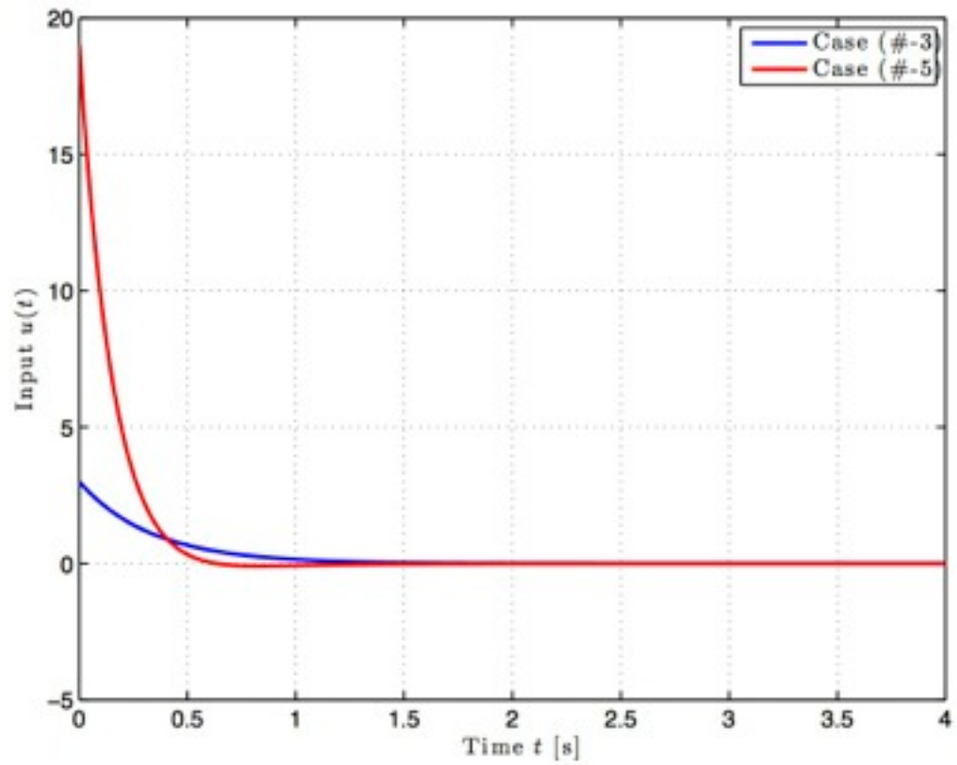


→ 極がより にある → Case の収束が

→ Case の最大値が

14.1 時間応答と入力の大きさ

- 例14. 1
  - Case #-3とCase #-5の操作量（入力）の比較



→ Case　　の入力の最大値が

→ 収束を　　ために極を複素平面の

に配置したため

→ 入力の大きさに制限がある場合は問題となる

14.1 時間応答と入力の大きさ

- 閉ループシステムの極を適切に設定

→ システムの　　や収束時間を　　可能

→ つぎの関係が

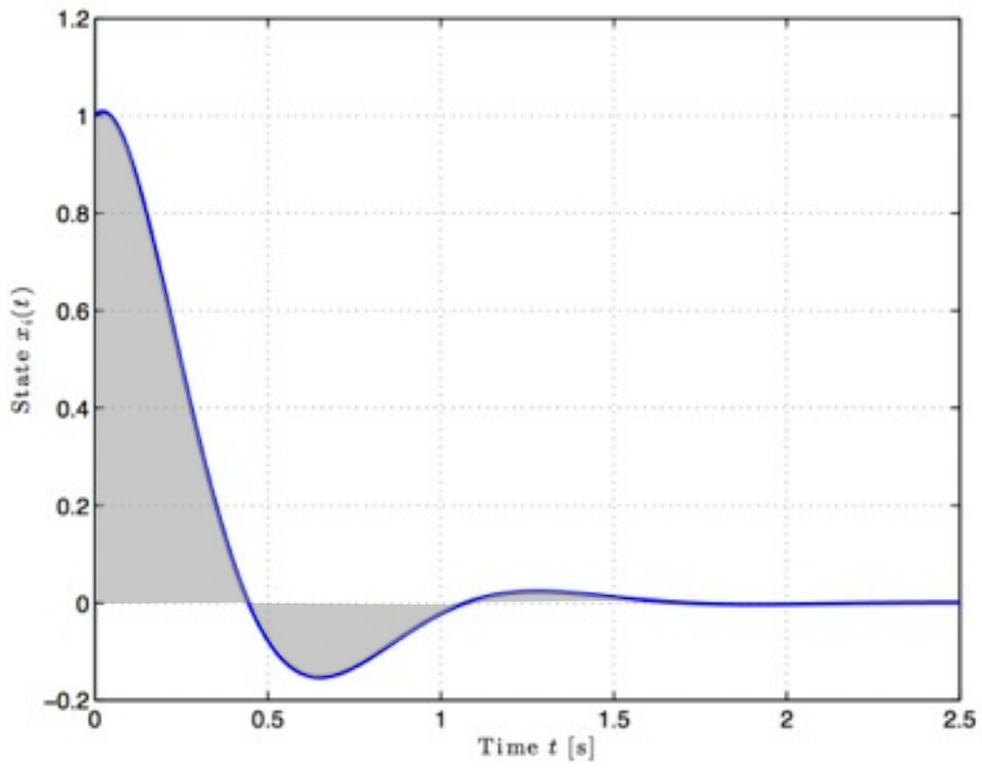
- 閉ループシステムの　　と状態変数の　　との関係
- 閉ループシステムの　　との関係

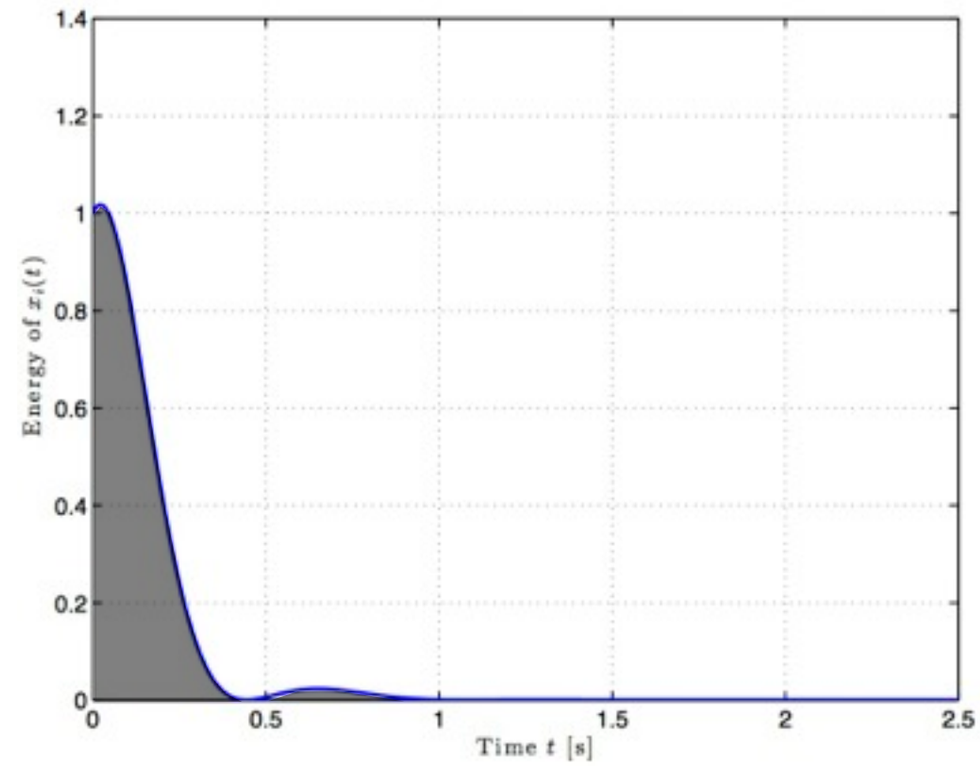
→ ある状態変数が過度の　　が生じたり，入力の最大値が　　になる

→ システムに加えられる入力の大きさには限界があり，必要な入力が加えられないとシステムは不安定になる場合もある

14.2 評価関数による制御性能と入力の評価

- ある１つの状態変数 $x_i(t)$ が初期値から0に漸近的に収束する様子
  - 状態変数が速やかに0に収束
    - → 部分の
    - → 積分値が あり
  - $x_i(t)$ の2乗積分を用いる
    - → 部分の
    - → 積分値は なる





14.2 評価関数による制御性能と入力の評価

- 状態変数 $x_i(t)$ の時間応答の2乗積分値

$J_{x_i} =$

→ この値を　　する制御を実現

→ 状態変数の時間的振る舞いは最小

→ J_{x_i} は状態変数 $x_i(t)$ の

- 入力 $u(t)$ の時間応答の2乗積分値

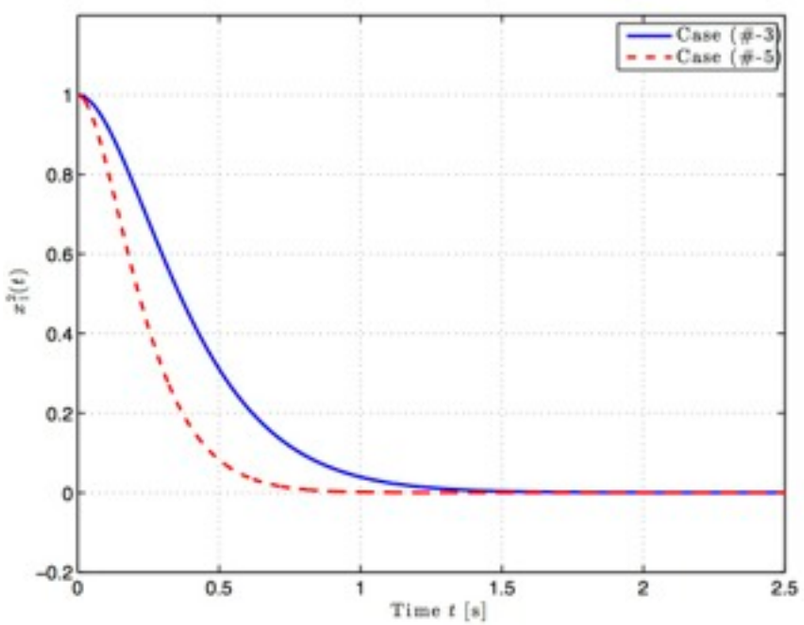
$J_u =$

→ 2乗積分値 J_u は入力 $u(t)$ の

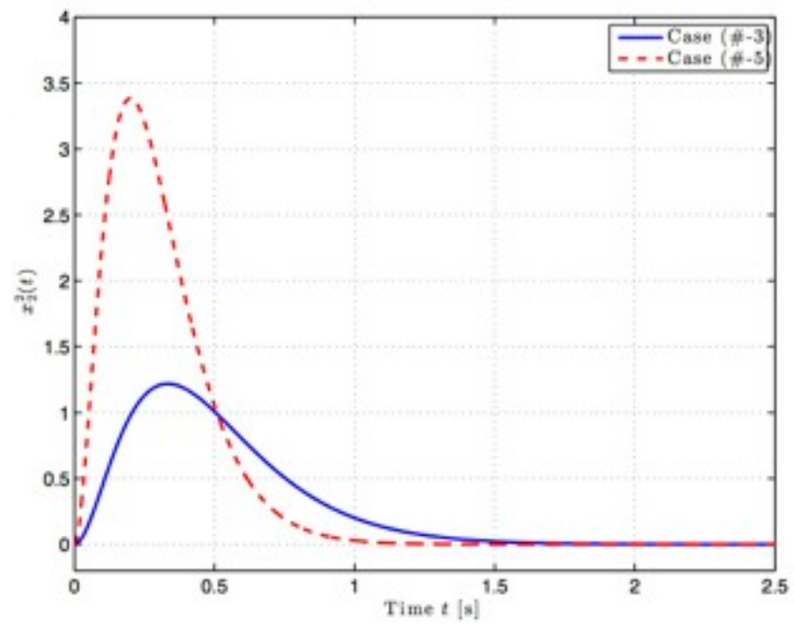
→ 最も小さくなればシステムに対する

14.2 評価関数による制御性能と入力の評価

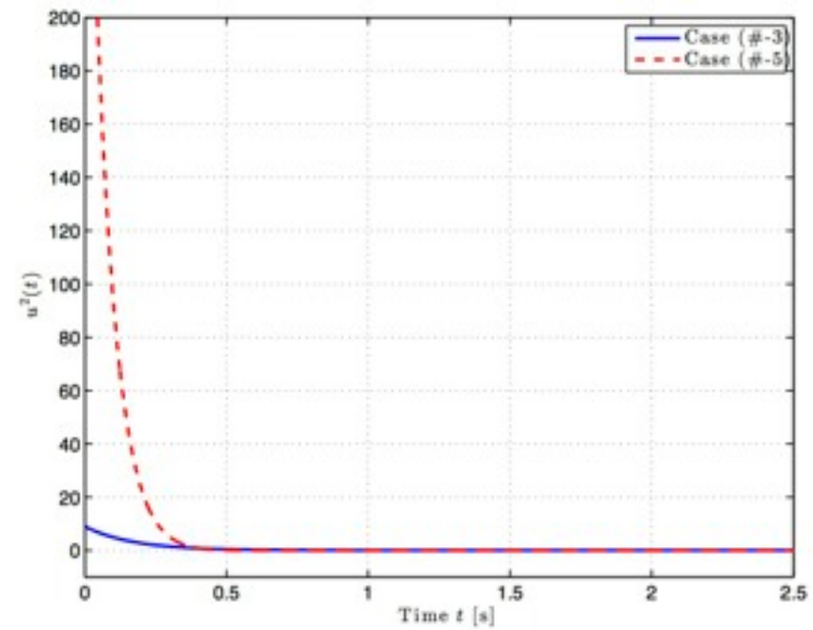
- 例14.2
  - 例14.1におけるCase #-3とCase #-5について



$x_1^2(t)$の値の変化



$x_2^2(t)$の値の変化



$u^2(t)$の値の変化

- 2乗積分値の比較

	$\#-3$	$\#-5$	
J_{x_1}	1.67×10^3	1.00×10^3	→ エネルギー
J_{x_2}	3.00×10^3	5.00×10^3	→ エネルギー
J_u	6.02×10^3	1.07×10^5	→ エネルギー

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 2乗積分の値を　　を評価する

$$J = q_1 J_{x_1} + q_2 J_{x_2} + r J_u$$

$$= \int_0^\infty \left\{ q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + r u^2(t) \right\} \mathrm{d}t$$

q_1, q_2, r : 定数 →

- $x_i(t)$ が　　に収束する → J_{x_i} が

→ J_{x_i} の値は $x_i(t)$ の　　に対応

- q_i を　　する → $q_i J_{x_i}$ が

→ $x_i(t)$ の　　する

- r を　　する → 必要な入力エネルギーを

ことに対応

→ J の　により $x_i(t)$ の速応性やオーバーシュートや

$u(t)$ の大きさ（エネルギー）を

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 評価の行列ベクトル表現

$$J = \int_0^\infty \left\{ q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + r u^2(t) \right\} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + r u^2(t) \right\} \mathrm{d}t$$

- n次元1入力1出力システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), y(t) = cx(t)$$

の場合の評価

$$J = \int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + r u^2(t) \right\} \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow J = \int_0^\infty \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right\} \mathrm{d}t$$

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- $J = \int_0^\infty \left\{ x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t) + r u^2(t) \right\} \mathrm{d}t$

  → 状態ベクトルの
  を評価できる関数

  →

  → 状態変数，入力の2乗を評価

  →

- 行列 Q について
  行列であればよい
- $r > 0$ を満たす必要がある

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- n次元1入力1出力システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), y(t) = cx(t)$$

に対し，評価関数

$$J = \int_0^\infty \left\{ x^\mathsf{T}(t)Qx(t) + ru^2(t) \right\} \mathrm{d}t$$

を最小にする

→ - 線形システムに対する　　の問題
  - 閉ループシステムを　　（レギュレータ）する問題

→ 　　問題，最適レギュレータ問題，レギュレータ問題，　　問題

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 評価関数

$$J = \int_0^\infty \left\{ x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t) + r u^2(t) \right\} \mathrm{d}t$$

- 速応性を高めたい

→ 状態変数に対する重み　を　　する

- 過大な制御入力が印加されない

→ 入力に対する重み　を　　する

- 重みの選び方に関する注意点

→ Q と r を　　大きく選ぶことは

→　　の関係

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 評価関数を最小にする最適制御則

  $u(t) =$

- はつぎの　　の解

  → $P = P^{\mathsf{T}} > 0$ を満たす

- 評価関数の

  $J_{\min} =$

- 最適制御則の解釈

  $u(t) = -r^{-1} b^{\mathsf{T}} P x(t)$

  → $u(t) = -f x(t), f =$

  →　　制御則

  → 閉ループシステムは　　ことが保証

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 例14. 3: マスーばねーダンパシステムの最適制御
  - 例13. 1と同じシステム
  - 制御目的

    物体（マス）の位置を過度に大きく変化させずに，初期状態から0に収束させる

    → 物体の位置 $x_1(t)$ に対応する重み q_1 を

  - 重みとリカッチ代数方程式の解

$$Q = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, r = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$P = P^{\mathsf{T}}$ とするため

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 例14. 3: マスーばねーダンパシステムの最適制御

$$A^{\mathsf{T}}P + PA - Pbr^{-1}b^{\mathsf{T}}P + Q = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -{p_2}^2 - 12p_2 + 13 & = 0 \\ p_1 - 5p_2 - 6p_3 - p_2p_3 & = 0 \\ -{p_3}^2 + 2p_2 - 10p_3 + 1 & = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} -30 + 14\sqrt{7} & 1 \\ 1 & -5 + 2\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

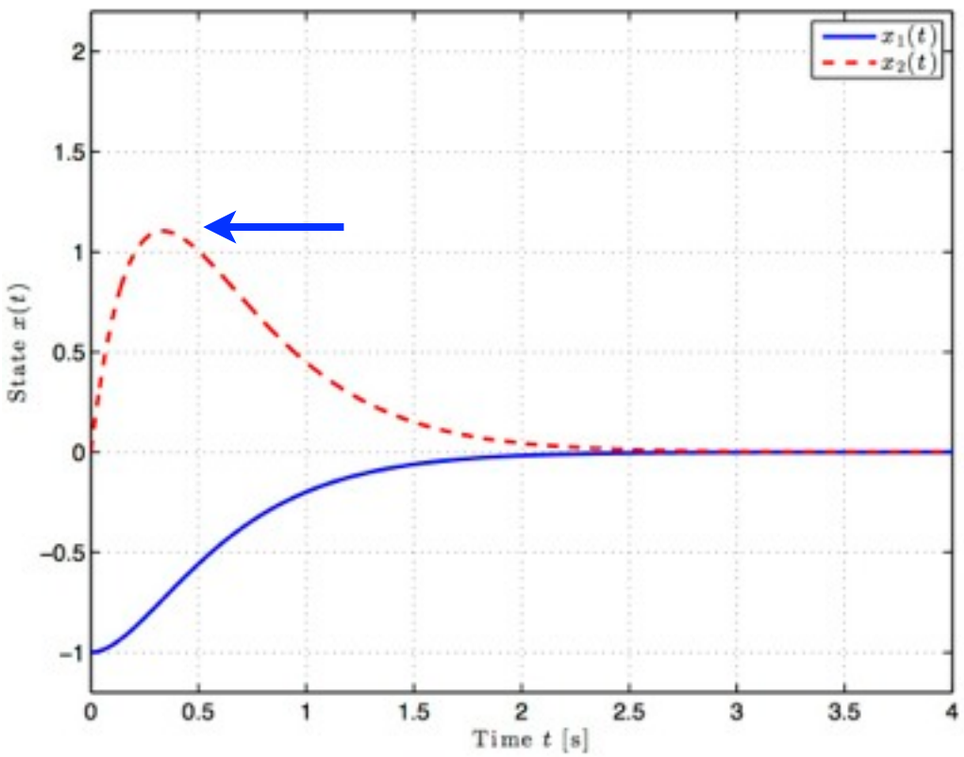
- 制御入力

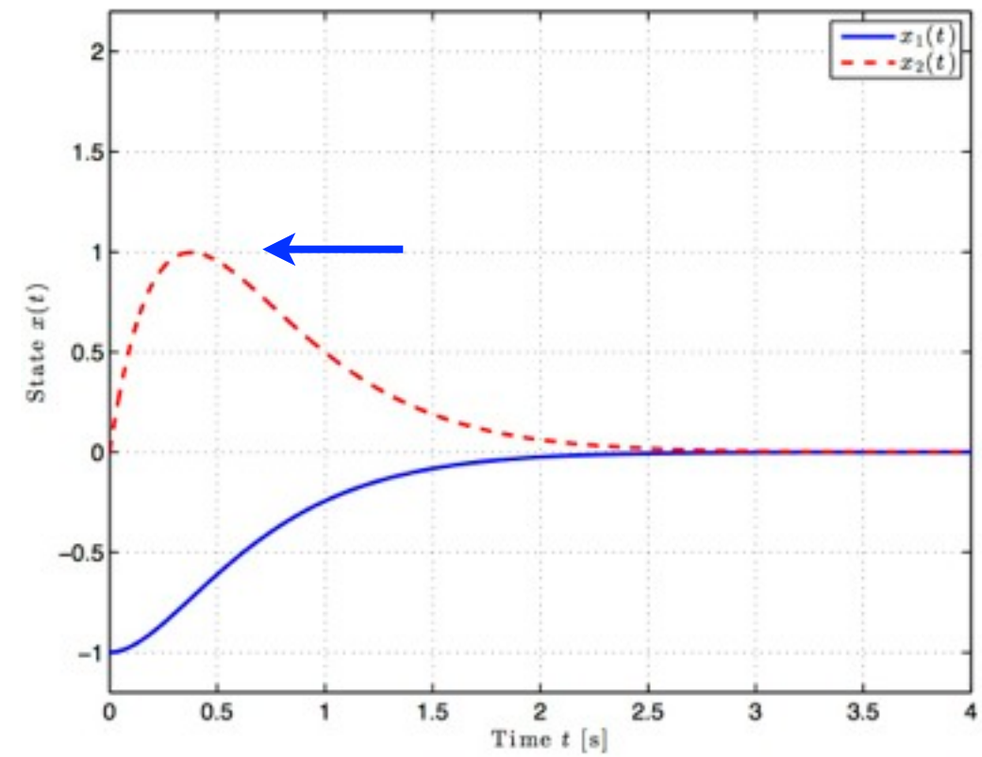
$$u(t) = -r^{-1}b^{\mathsf{T}}Px(t)$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & -5 + 2\sqrt{7} \end{bmatrix} x(t) \approx -\begin{bmatrix} 1 & 0.2915 \end{bmatrix} x(t)$$

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 例14. 3: マスーばねーダンパシステムの最適制御
  - シミュレーション結果
  - 極配置法による結果
  - 最適制御による結果





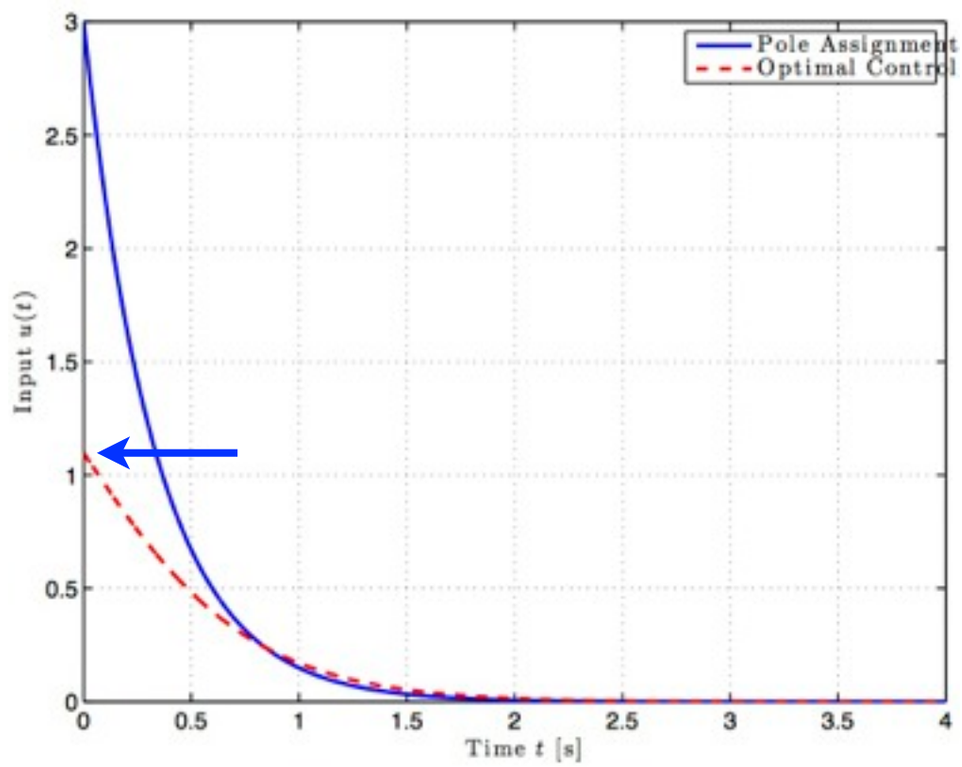
$$u(t) = -\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 1 & -5+2\sqrt{7} \end{bmatrix} x(t)$$

- 閉ループシステムの極：
  -3 の2重根

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 例14. 3: マスーばねーダンパシステムの最適制御
  - シミュレーション結果
    - 入力の比較



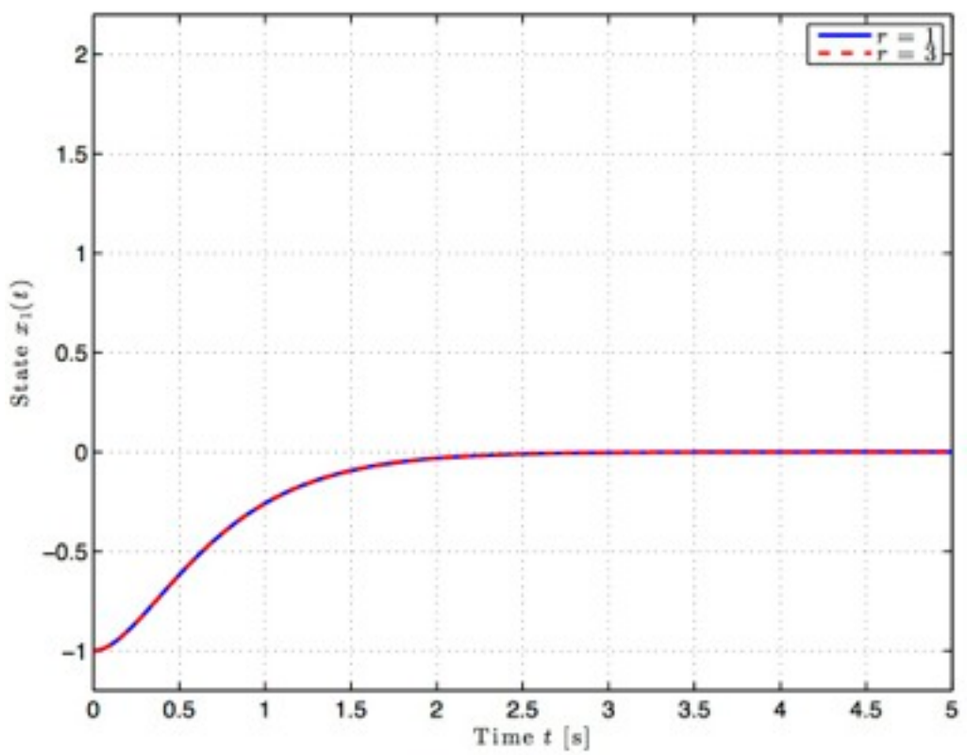
→ の最大値が

→ 最適制御則を用いた

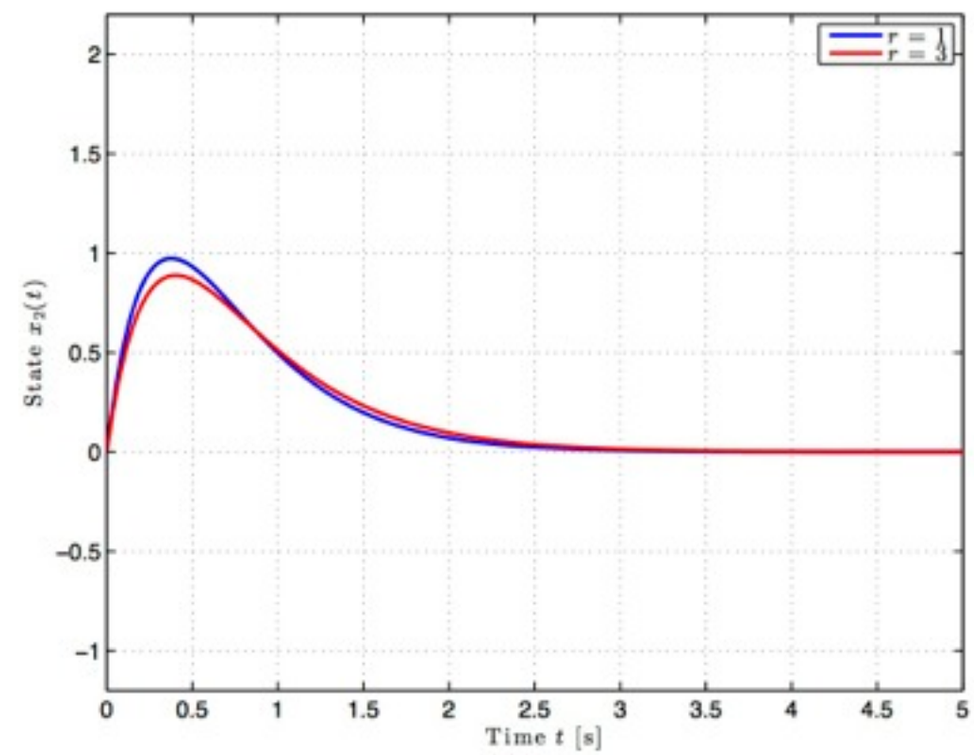
14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 例14. 3: マスーばねーダンパシステムの最適制御
  - シミュレーション結果
    - 応答の比較

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, r = 1, r = 3 \text{ の場合で比較}$$



$x_1(t)$



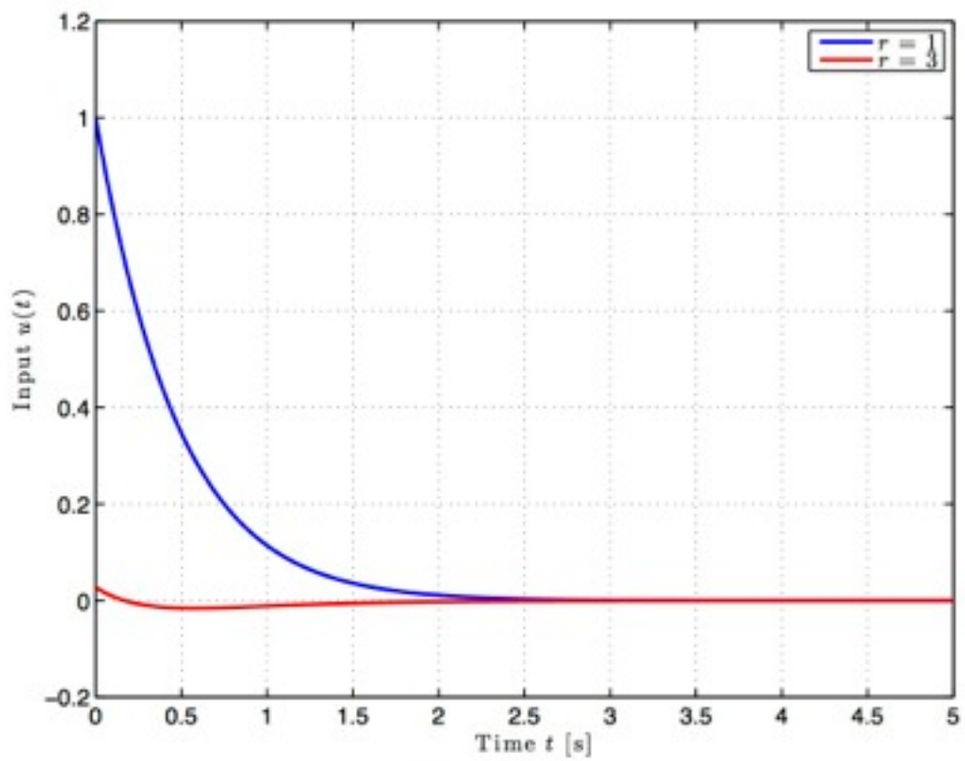
$x_2(t)$

→ には大きな変化なし

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 例14. 3: マスーばねーダンパシステムの最適制御
  - シミュレーション結果
    - 入力の比較

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, r = 1, r = 3$$ の場合で比較



- $r = 3$ の場合の制御入力

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0.0277 & 0.0387 \end{bmatrix} x(t)$$

→ フィードバック
の大きさが

→ の最大値が

→ も

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

- 最適制御による設計の特徴
  - 評価関数を最小にする入力

$$u(t) = -fx(t), f = r^{-1}b^{\mathsf{T}}P$$

→ 状態フィードバック制御則と同じであるが
状態フィードバックゲイン　はリカッチ代数
方程式の解　により

→ 望ましい閉ループシステムの極の位置を
指定していない（安定は保証）

- 設計に際しては重み Q, r を与えるのみ

→ 得られる応答と重みの関係は

→ 重みの与え方の傾向がわかるのみ

14. 3 評価関数を最小にする最適制御則

最適制御則

- 最適制御（最適レギュレータ）の設計パラメータはリカッチ代数方程式

$$A^{\mathsf{T}}P + PA - Pbr^{-1}b^{\mathsf{T}}P + Q = 0$$

の Q, r である.

  - Q は
  - r は　　必要な

を評価するパラメータであり，最適制御は

制御手法と考えることもできる

- 最適制御により閉ループシステムの極を

14. 4 折り返し法による最適レギュレータの設計

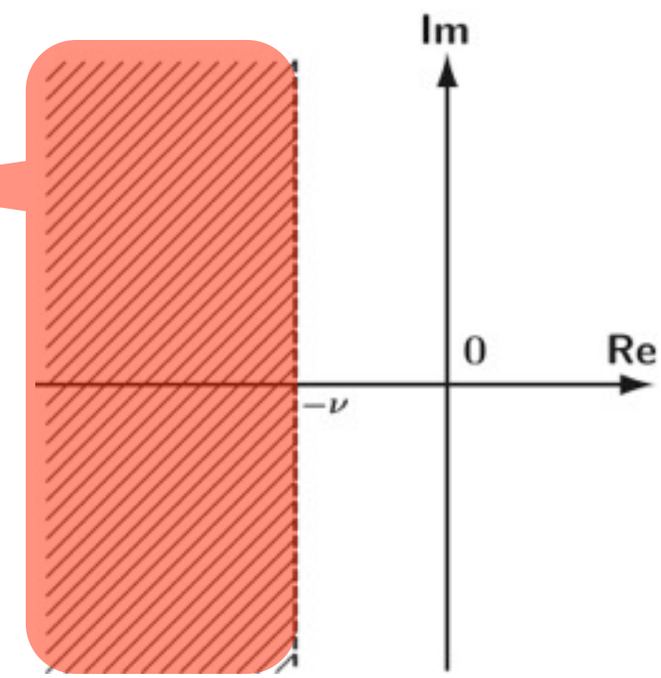
- 制御系設計における閉ループシステムの極

→ システムの速応性と安定性を決める重要な指標

→ システムが　　であれば　　により
指定した位置に極を

- 実際には，一つ一つ位置を指定するのではなく，複素平面の左半平面の領域内に配置したり，特定の極のみ配置することが多い．

極がこの範囲にあれば，
である



14. 4 折り返し法による最適レギュレータの設計

- 極配置法における問題点
  - 極を　　左半平面に配置すると
    ものの，必要な入力エネルギーが　　なる
- 最適制御（最適レギュレータ）における問題点
  - 制御性能と入力エネルギーの大きさを考慮した
    設計が可能であるが，極が配置される領域は

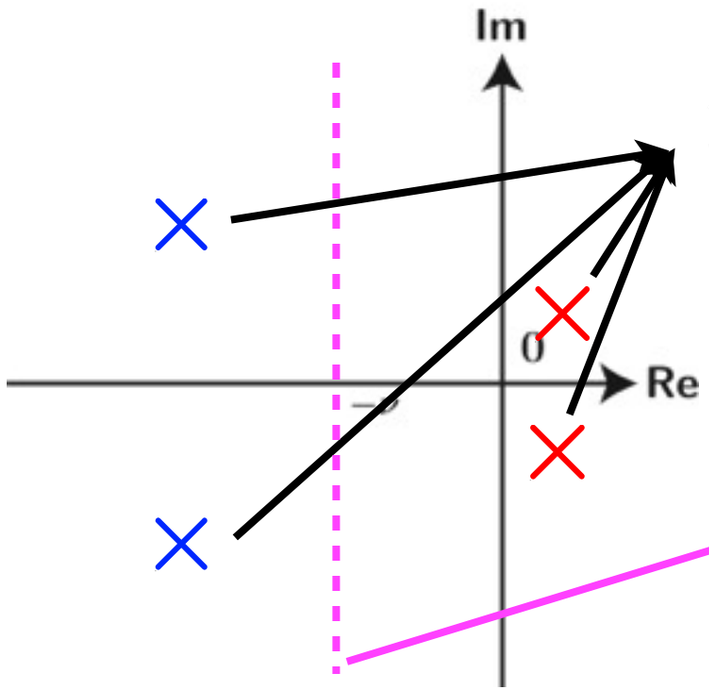
→ 指定した領域に閉ループシステムの極を配置可能な最適レギュレータ

→

→ 最適レギュレータの

14. 4 折り返し法による最適レギュレータの設計

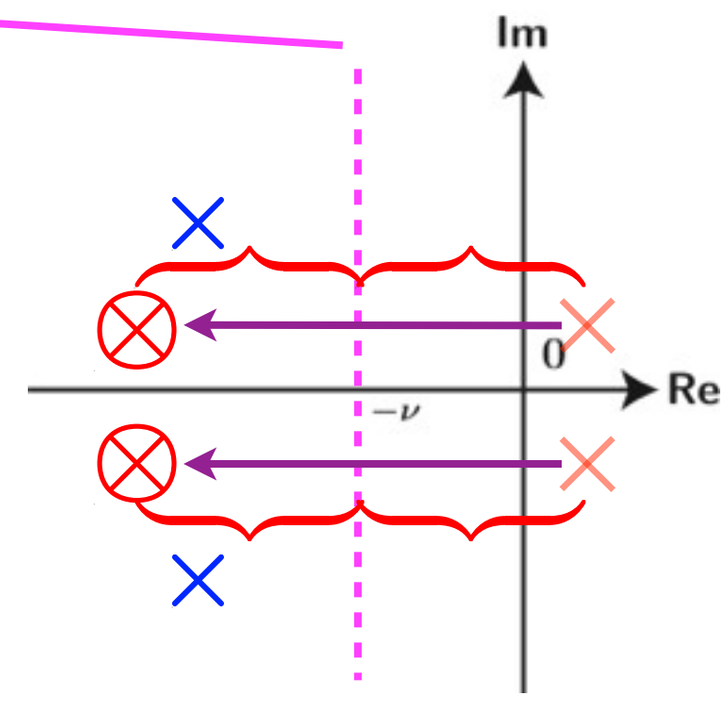
- 折り返し法の概念
  - 4次元線形システムの場合（極の重複なし）



システムの極の位置

×：　　な極

×：　　な極



- 折り返し法を適用
  - 　　な極　　が折り返し線を対称軸にして
  - 　　な極は移動しない
  - 折り返し線を決める　が

14. 4 折り返し法による最適レギュレータの設計

- 折り返し法による最適レギュレータの設計法
  - n次元1入力1出力システム

    $$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), y(t) = cx(t)$$

  - 折り返し法の設計パラメータ：ν

    → は $(-\nu, 0)$ を通る虚軸と

  - 係数行列Aの固有値：$\lambda_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$

    → 固有値を実軸の正方向にνだけ移動（シフト）

    → $\tilde{\lambda}_i =$, $i = 1, 2, \cdots, n$

  - 固有値が　となる　　なシステム

    $$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + b\tilde{u}(t)$$

    →

14. 4 折り返し法による最適レギュレータの設計

- シフト系

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + b\tilde{u}(t) \qquad \tilde{A} := A + \nu I$$

- シフト系を用いたリカッチ代数方程式

$$\tilde{A}^{\mathsf{T}}P + P\tilde{A} - Pbr^{-1}b^{\mathsf{T}}P = 0$$

→ ある r を定めてシフト系のリカッチ代数方程式を解いて，解 P のうちから最大解 P^{+} を求める

他の解との差が
半正定となる解

- シフト系に対する最適制御則
（状態フィードバック制御則）

$$u(t) =$$

14. 4 折り返し法による最適レギュレータの設計

- シフト系に対する最適制御則

$$u(t) = -r^{-1} b^{\mathsf{T}} P^{+} x(t)$$

↓ つぎの評価関数を最小にする

$$J = \int_0^\infty \left\{ x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t) + r u^2(t) \right\} \mathrm{d}t, \quad Q :=$$

→ を より に配置する
ことが される

→ 折り返し線のパラメータ と重み を決定する
だけで2次形式評価関数の重み が定まる

講義14のまとめ

- 最適レギュレータは2次形式評価関数を最小（最適）にする状態フィードバック制御則であり，制御性能と入力エネルギーのバランスを考慮した制御系が構成できる.
- 最適レギュレータは閉ループシステムの極を配置することはできない.
- 折り返し法は最適レギュレータの重みの選定法であり，閉ループシステムの極がある範囲に配置されるように設計可能である.